МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы»
(ФГБОУ ВО «БГПУ им. М.Акмуллы»)

УТВЕРЖДЕНА
Решением научно-методического совета
по направлению подготовки
кадров высшей квалификации 03.06.01,

Председатель НМС

____
В.М. Корнилов

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА
по специальной дисциплине
Математика

Направление подготовки кадров высшей квалификации:

01.06.01 Математика и механика

Профили подготовки научно-педагогических кадров:

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

УФА 2019

1. **Требования к уровню подготовки лиц, поступающих на основную образовательную программу подготовки научно-педагогических кадров**:

Знания: Основные разделы математики.

Умения: Применять знания по математике к решению профессиональных задач.

Владение (опыт профессиональной деятельности): теоретическими и практическими знаниями по основным разделам математики

2. Содержание дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Математический анализ	Предел функции одной переменной. Различные определения, эквивалентность определения предела на языке последовательностей и основного определения. Предельные точки множества. Лемма Больцано-Вейерштрасса, критерия Больцано-Коши существования конечного предела для последовательности и функции. Непрерывность функции. Теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса, Кантора о непрерывных функциях. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа о конечном приращении), формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши (без доказательства). Частные производные и дифференциалы функций многих переменных. Связь между дифференцируемостью, непрерывностью и существованием частных производных (в отличии от случая одного переменного). Определенный интеграл Римана. Критерий интегрируемости, три признака интегрируемости (по непрерывности, монотонности, ограниченности), приложения определенного интеграла (основные формулы без доказательства). Несобственные интегралы, критерии сходимости, признаки сравнения. Признаки Абеля и Дирихле (без доказательства). Кратные интегралы, теоремы о сведении двойного интеграла к повторным, замена переменных в кратном интеграле (без

		доказательства), проиллюстрировать в случае цилиндрических и сферических координат. Числовые ряды. Признаки Даламбера и Коши сходимости положительных рядов, абсолютная и условная сходимость, признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Оценка остатка знакочередующегося ряда. Функциональные ряды, равномерная сходимость. Функциональные свойства суммы ряда. Степенной ряд. Теорема Абеля, радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Поверхностные интегралы и их вычисление. Необходимые и достаточные условия экстремума функции одной переменной. Экстремум функции многих переменных (без доказательства).
2	Функциональный анализ	Метрическое пространство, принцип сжатых отображений, связь с итеративными методами. Гильбертово пространство, теорема о проекциях. Линейный функционал, общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.
3	Теория функций комплексного переменного	Дифференцируемость по комплексной переменной, аналитические функции. Интеграл по комплексной переменной, интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши. Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Вычеты. Теорема о вычетах.
4	Геометрия	Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Различные уравнения плоскости в пространстве. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду. Кривизна кривой. Определение поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл первой и второй квадратичных форм поверхности
5	Алгебра	Определители и их свойства. Метод Крамера. Действия над матрицами. Обратная матица. Ранг матрицы и методы его вычисления. Система линейных уравнений, метод Гаусса. Линейное пространство, евклидово пространство, скалярное произведение и его свойства. Ортонормированные базисы, ортогональные преобразования. Линейные операторы в конечномерных пространствах и их матицы. Собственные векторы и характеристические числа. НОД и алгоритм Евклида. Группа, кольцо, поле, подгруппа, изоморфизм

		групп, нормальный делитель, фактор группа
6	Дифференциальные уравнения. Уравнения математической физики	Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.). Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы. Классификация уравнений второго порядка Задача о колебании струны с закрепленными концами и ее решение методом Фурье. Уравнение теплопроводности, решение задачи Коши (многомерный случай). Формула решения. Смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности. Принцип максимума, принцип разделения переменных. Принцип максимума для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для кругаКраевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье. Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства. Монотонные нелинейные эллиптические уравнения. Основные свойства. Монотонные нелинейные параболические уравнения. Основные свойства.

3. Учебно-методическое обеспечение:

Основная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Части.1,2.-СПб.:Лань, 2015.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Части 1,2.М.:МЦНМО, 2012.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа т.т.1,2,3.-М.: Дрофа, 2006.
4. Колмогоров А.Н.,Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М.: Физматлит, 2004.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.:Наука,1965.

6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978.
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ Часть 1. СПб.: Лань, 2004.
8. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М.:URSS, 2016.
9. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: МГУ, 1969.
10. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.:URSS, 2019.
11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. –СПб.: Лань, 2008.
12. Кострикин А.И. Введение в алгебру –М.:ФИЗМАТЛИТ,2004.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1976.
14. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск:«РХД», 2000.
15. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. -М.:Наука,1985.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.:Наука,1999.
17. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Едиториал УРСС, 2010.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. т.т.1,2.-М.:Наука,1969
2. Зорич В.А. Математический анализ. Части 1,2.М.:Наука,1984
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ т.т.1,2.-М.:Высшая школа,1970
4. Колмогоров А.Н.,Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.-М.:Наука,1968
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ Часть 1 М.: Наука, 1985
6. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М.: ФМЛ, 1963
7. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: МГУ, 1969
8. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. –М.:Наука,1975
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру –М.:Наука,1981
11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1970
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. -М.:Наука,1971
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.:Наука,1966
14. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972

Информационные ресурсы:

1. eLIBRARY – Научная электронная библиотека http://elibrary.ru/
2. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: http://window.edu.ru/window/

3. Федеральный портал «Российское образование»: http://www.edu.ru/

4. Примерные вопросы к экзамену

1. Предел функции одной переменной. Различные определения, эквивалентность определения предела на языке последовательностей и основного определения.
2. Предельные точки множества. Лемма Больцано-Вейерштрасса, критерия Больцано-Коши существования конечного предела для последовательности и функции.
3. Непрерывность функции. Теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса, Кантора о непрерывных функциях.
4. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа о конечном приращении), формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши (без доказательства).
5. Частные производные и дифференциалы функций многих переменных. Связь между дифференцируемостью, непрерывностью и существованием частных производных (в отличии от случая одного переменного).
6. Определенный интеграл Римана. Критерий интегрируемости, три признака интегрируемости (по непрерывности, монотонности, ограниченности), приложения определенного интеграла (основные формулы без доказательства).
7. Несобственные интегралы, критерии сходимости, признаки сравнения. Признаки Абеля и Дирихле (без доказательства).
8. Кратные интегралы, теоремы о сведении двойного интеграла к повторным, замена переменных в кратном интеграле (без доказательства), проиллюстрировать в случае цилиндрических и сферических координат.
9. Числовые ряды. Признаки Даламбера и Коши сходимости положительных рядов, абсолютная и условная сходимость, признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
10. Функциональные ряды, равномерная сходимость. Функциональные свойства суммы ряда.
11. Степенной ряд. Теорема Абеля, радиус сходимости, формула Коши-Адамара.
12. Поверхностные интегралы и их вычисление.
13. Необходимые и достаточные условия экстремума функции одной переменной. Экстремум функции многих переменных (без доказательства).
14. Метрическое пространство, принцип сжатых отображений, связь с итеративными методами.
15. Гильбертово пространство, теорема о проекциях.
16. Линейный функционал, общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

17. Дифференцируемость по комплексной переменной, аналитические функции.
18. Интеграл по комплексной переменной, интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши.
19. Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
20. Вычеты. Теорема о вычетах.
21. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Различные уравнения плоскости в пространстве.
22. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.
23. Кривизна кривой.
24. Определение поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
25. Геометрический смысл первой и второй квадратичных форм поверхности.
26. Определители и их свойства. Метод Крамера.
27. Действия над матрицами. Обратная матица.
28. Ранг матрицы и методы его вычисления. Система линейных уравнений, метод Гаусса.
29. Линейное пространство, евклидово пространство, скалярное произведение и его свойства. Ортонормированные базисы, ортогональные преобразования.
30. Линейные операторы в конечномерных пространствах и их матицы. Собственные векторы и характеристические числа.
31. НОД и алгоритм Евклида.
32. Группа, кольцо, поле, подгруппа, изоморфизм групп, нормальный делитель, фактор группа.
33. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
34. Решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка.
35. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).
36. Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.
37. Классификация уравнений второго порядка
38. Задача о колебании струны с закрепленными концами и ее решение методом Фурье.
39. Уравнение теплопроводности, решение задачи Коши (многомерный случай). Формула решения.
40. Смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности. Принцип максимума, принцип разделения переменных.
41. Принцип максимума для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для кругаКраевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.

42. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.
43. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.
44. Нелинейные гиперболические уравнения. Основные свойства.
45. Монотонные нелинейные эллиптические уравнения. Основные свойства.
46. Монотонные нелинейные параболические уравнения. Основные свойства.

5. Структура билета.

Экзаменационный билет состоит из трех вопросов:

1. Теоретический вопрос.
2. Практический вопрос.
3. Собеседование.

Программа вступительного экзамена составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом, утвержденным Приказом Министерства образования и науки РФ от «30» июля 2014 г. № 867.

Разработана и утверждена на кафедре математики и статистики.